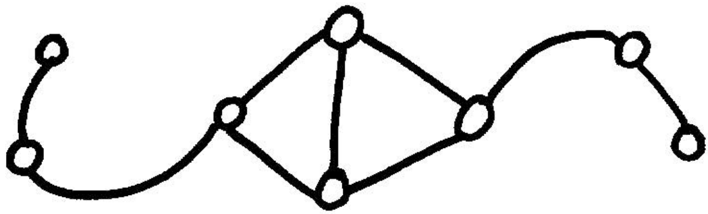
THÉORIE DES GRAPHES

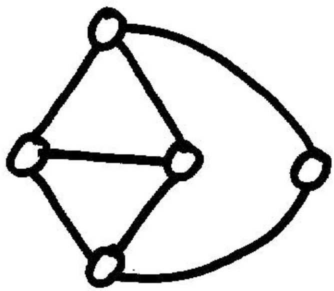


Pour les

ENFANTS!

(d'après JD Hamkins)

Un <u>graphe</u> est un ensemble de sommets reliés par des Arêtes



Ce graphe a :

- 5 Sommets
- 7 Arêtes

Et il divise le plan en 4 régions.

Le mathématicien Leonhard EULER a remarqué une particularité en calculant :

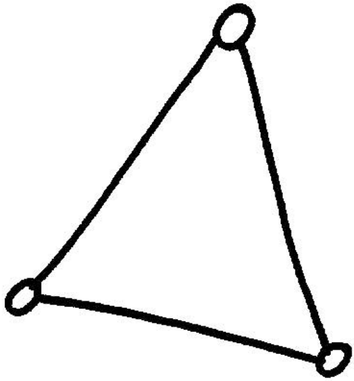
$$\begin{pmatrix}\text{nombre de}\\ \text{Sommets}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{nombre d'}\\ \text{Arêtes}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{nombre de}\\ \text{Régions}\end{pmatrix}$$

$$S - A + R$$

Ce nombre est à présent connu comme la

<u>Caractéristique d'Euler</u>

Calculons-le !



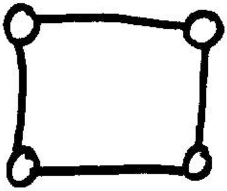
Pensez à compter la région extérieure !

Sommets : ___

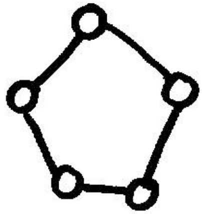
Arêtes : ___

Régions : ___

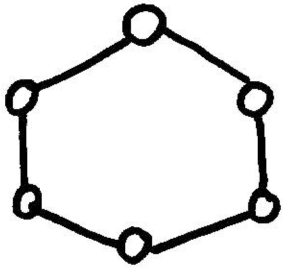
$S - A + R =$ ___



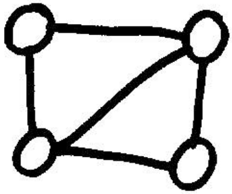
$$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} = \_\_\_$$



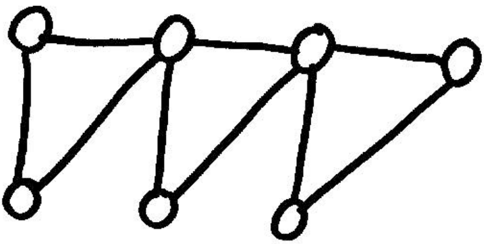
$$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} = \_\_\_$$



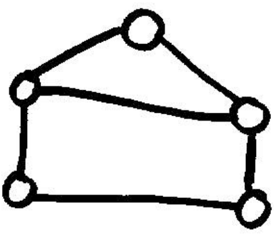
$$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} = \_\_\_$$



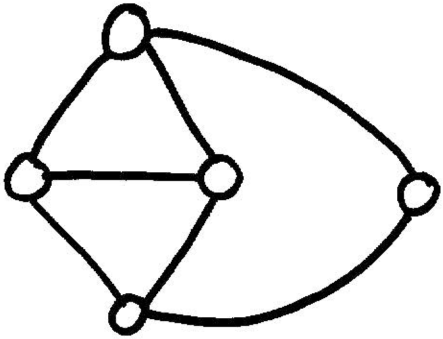
$$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} = \_\_\_$$



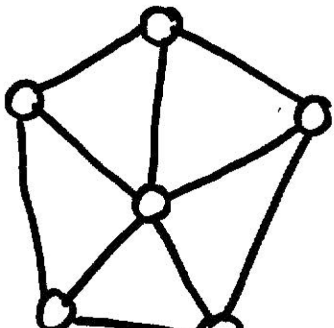
$$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} = \_\_\_$$



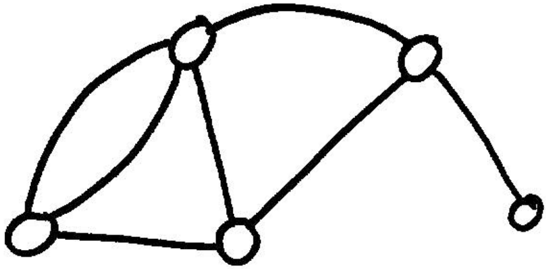
$$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} = \_\_\_$$



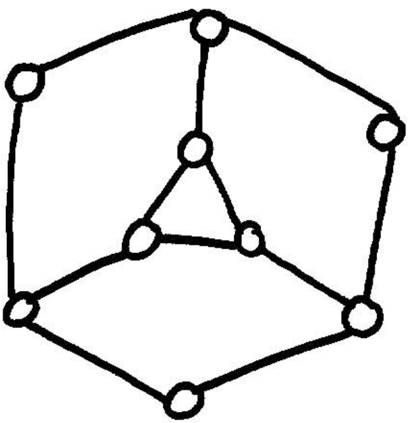
$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} =$ ______



$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} =$ ______



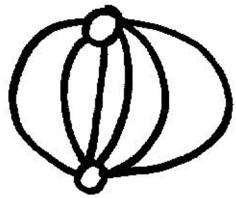
$$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} = \_\_\_\_$$



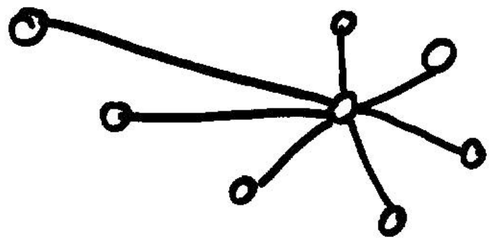
$$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} = \_\_\_\_$$

Obtenons-nous toujours 2 ?

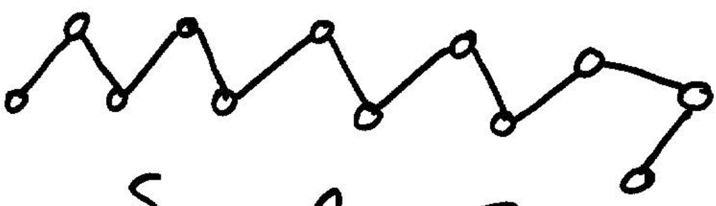
Essayons des cas extrêmes...



S − A + R = ____



S − A + R = ____



S − A + R = ____

Essaye toi-même !

Mon graphe :

$$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} = \underline{\qquad\qquad}$$

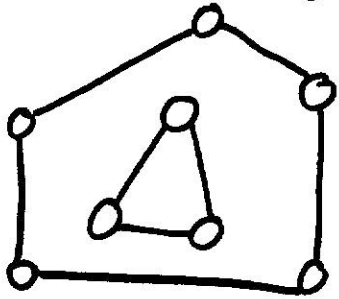
Mon graphe :

$$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} = \_\_\_\_\_$$

Mon graphe :

$$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} = \_\_\_\_\_$$

Essayons ce graphe :

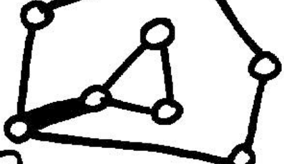


$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} =$ ___

Obtiens-tu 2 ? Non ?

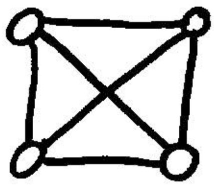
Ce graphe est non-connecté.

On peut connecter les deux éléments en ajoutant une Arête.



$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{R}{\bigcirc} =$ ___

Qu'en est-il pour ce graphe ?

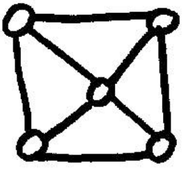


S − A + R = ___

Est-ce que cela a marché ?

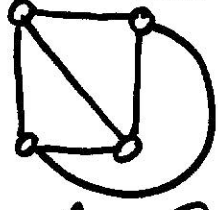
Dans ce graphe, les arêtes diagonales se croisent. Corrigeons cela.

Ajouter un sommet



S − A + R = ___

Déplacer une arête



S − A + R = ___

Maintenant cela marche !

Un graphe <u>planaire</u> peut être dessiné quand les arêtes ne se croisent pas

Est-ce que pour un graphe planaire connecté, la caractéristique d'Euler est toujours égale à 2 ?

OUI !

C'est vrai dès qu'il y a :

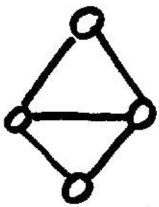
1 Sommet

pas d'Arête

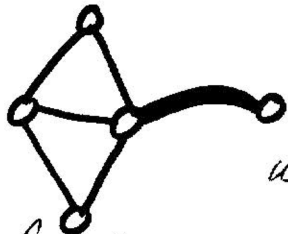
1 Région

$$\underset{1}{S} - \underset{0}{A} + \underset{1}{R} = \underline{2}$$

• Cela reste vrai quand on ajoute un sommet connecté



Avant



Après

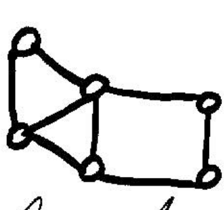
Un nouveau sommet

Une nouvelle arête

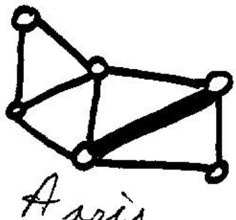
$S - A + R$

Sommets et arêtes s'équilibrent.

• Cela reste vrai quand l'on coupe une région avec une nouvelle arête.



Avant



Après

Une nouvelle Arête

Une région supplémentaire

$S - A + R$

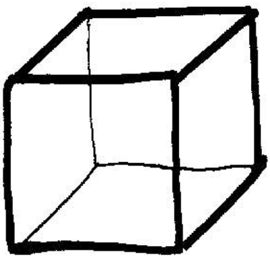
Conclusion :

Tout graphe planaire connecté répond à :

$$S - A + R = 2$$

Regardons à présent les surfaces de solides tri-dimensionnels

CUBE

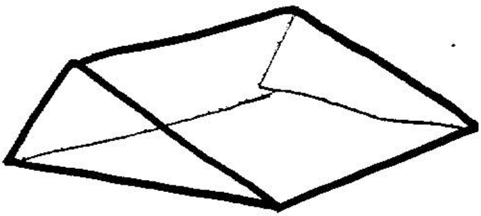


Sommets Arêtes Faces

$\bigcirc - \bigcirc + \bigcirc =$ ____

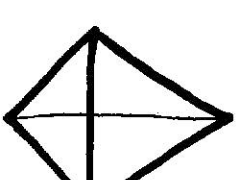
On les appelle « faces » au lieu de « régions »

Prisme Triangulaire



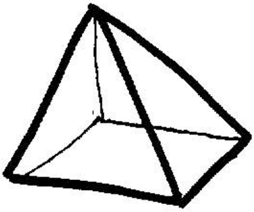
S − A + F = ____

Tetraèdre



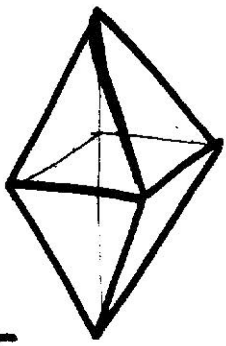
S − A + F = ____

Pyramide (base carrée)



$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{F}{\bigcirc} = \_\_\_\_$

Octaèdre



$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{F}{\bigcirc} = \_\_\_\_$

Peux-tu dessiner un solide en 3D ?

Mon Solide :

$S - A + F =$ ___

Un autre solide en 3D :

$$\overset{S}{\bigcirc} - \overset{A}{\bigcirc} + \overset{F}{\bigcirc} = \_\_\_\_$$

Ce livret a été initialement conçu, comme le livret "Coloriages de graphes et nombres chromatiques", par le brillant professeur américain

Joel David Hamkins, qui m'a aimablement autorisé à le traduire...

son blog : http://jdh.hamkins.org

JHAMKINS@GC.CUNY.EDU

(Pour la traduction :
FX FAUCHER fxf@toysfab.com
http://www.toysfab.com)